

# EQUILIBRE LIMITE

## 1. - GENERALITES SUR LES CALCULS A LA RUPTURE

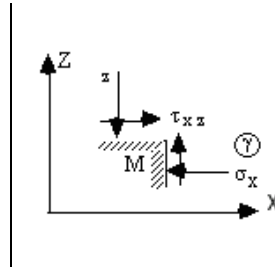
### 1.1. - Equations d'équilibre

On ne connaît pas, en général, les lois qui régissent les efforts et les déformations dans le sol. On ne sait donc pas calculer, dans le cas général, les contraintes et les déformations. Mais lorsqu'il y a rupture, les équations générales d'équilibre et l'équation de la courbe intrinsèque permettent de calculer les contraintes au moment de la rupture.

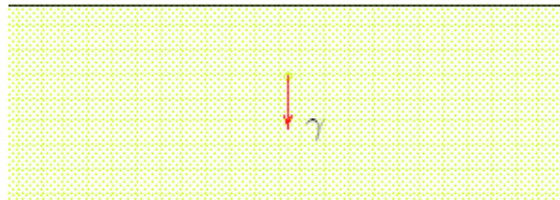
$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad [1]$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad [1 \text{ bis}]$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \gamma \quad [2]$$



Dans le cas d'un problème plan, nous aurons :



$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \gamma$$

S'il y a rupture au point M, le cercle de Mohr est tangent à la courbe intrinsèque.

### 1.2. - Loi de Coulomb

$$\overline{O'N} = \overline{O'T} = (\overline{OO'} + \overline{OB}) \cdot \sin \phi = (\overline{OO'} + H) \cdot \sin \phi$$

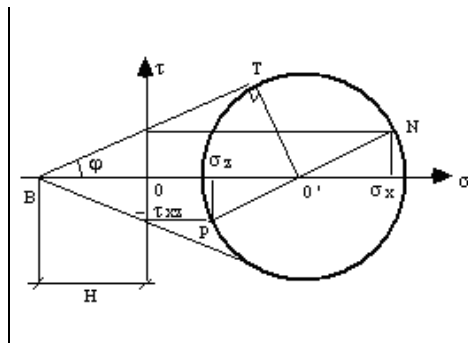
[a]

$$\text{or } \overline{OO'} \text{ est déterminé par } \overline{OO'} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}$$

$$\overline{ON}^2 = (\sigma_x + \overline{OO'})^2 + \tau_{xz}^2$$

de [a] on tire :

$$\overline{ON}^2 = \frac{(\sigma_x + \sigma_z + 2H)^2}{2} \cdot \sin^2 \phi$$



Et :

$$\frac{(\sigma_x + \sigma_z + 2H)^2}{2} \cdot \sin^2 \phi = \frac{(\sigma_x - \sigma_z)^2}{2} + \tau_{xz}^2$$

Cette condition est connue sous le nom de condition de Coulomb. Elle peut prendre différentes formes. Si on utilise les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  nous aurons :

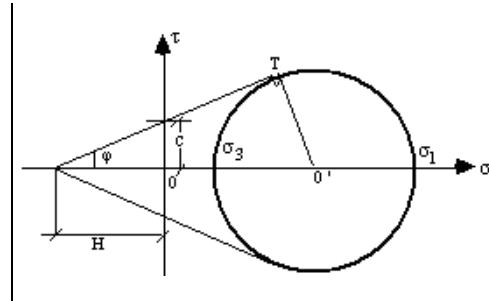
$$H = \frac{c}{\operatorname{tg} \phi} \quad \text{et} \quad \overline{O'T} = \overline{OO'} \cdot \sin \phi + c \cdot \cos \phi$$

le diamètre du cercle est  $\sigma_1 - \sigma_3$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2 \cdot \overline{O'T} = 2 \cdot \overline{OO'} \cdot \sin \phi + 2c \cdot \cos \phi$$

or

$$\overline{OO'} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$



Et :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_1 + \sigma_3) \cdot \sin \phi + 2c \cdot \cos \phi$$

Cette nouvelle forme de la loi de Coulomb peut encore s'écrire :

$$\sigma_1 = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \cdot \sigma_3 + \frac{2 \cos \phi}{1 - \sin \phi} \cdot c$$

soit en utilisant l'angle  $\phi/2$

$$\sigma_1 = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \cdot \sigma_3 + 2 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \cdot c$$

On voit donc que pour un sol pulvérulent,  $c = 0$ , et le rapport  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$  est constant et égal à :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$$

### 1.3. - Généralisation

Pour certains problèmes, les calculs seront effectués à la rupture et ce sont directement les contraintes de rupture qui seront prises en compte :  $c$ 'est le cas des murs de soutènement pour lesquels le sol derrière le mur est supposé se trouver dans un état de rupture. Pour d'autres problèmes au contraire, on déterminera les charges qui provoquent la rupture et ces charges seront frappées d'un "coefficient de sécurité" qui permettra de se prémunir de cette rupture ; (fondations superficielles et profondes, talus...).

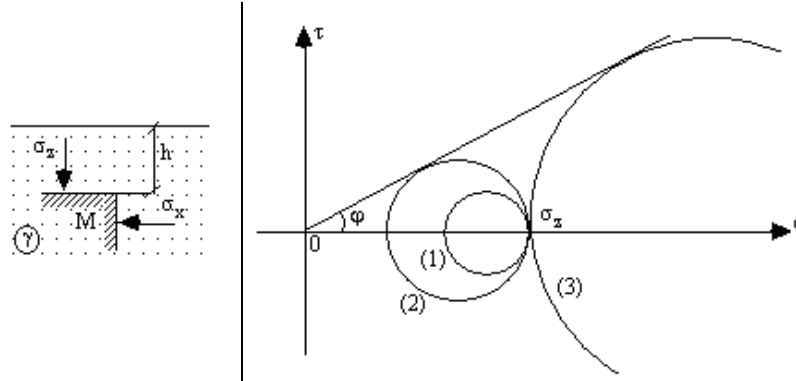
## 2. - CALCUL DES FORCES DE POUSSEE ET BUTEE PAR LA METHODE DE RANKINE

Pour plus de clarté, nous étudierons ce problème par étapes, en considérant d'abord un massif semi-infini à surface horizontale puis à surface inclinée. De même, chaque étude se fera pour un sol pulvérulent avec extension aux sols cohérents.

### 2.1. - Equilibre d'un massif à surface horizontale

#### 2.1.1.- Cas d'un sol pulvérulent

Considérons un point M à la profondeur  $h$  ; on cherche à déterminer les contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_z$  (qui sont principales) agissant sur les plans horizontal et vertical passant par M. Les équations générales d'équilibre permettent d'écrire :  $\sigma_z = \gamma \cdot h$ . Tant que le massif reste au repos, on ne peut déterminer  $\sigma_x$ . On pose alors  $\sigma_x = K_0 \cdot \sigma_z$ .  $K_0$  est un coefficient expérimental. Jäky a démontré statistiquement que  $K_0$  était voisin de  $K_0 = 1 - \sin\phi$ .

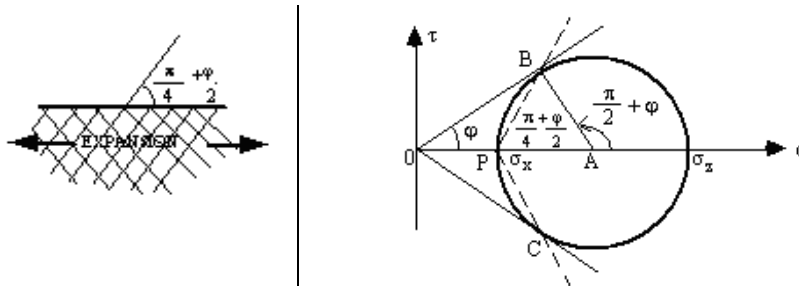


Le cercle de Mohr des contraintes en M est le cercle (1) dont les contraintes principales sont

$$\sigma_z = \gamma \cdot h$$

$$\sigma_x = K_0 \cdot \gamma \cdot h$$

a) Imaginons que par un procédé quelconque, on provoque une expansion latérale du sol, qui s'accompagne d'une diminution de la contrainte  $\sigma_x$  en maintenant  $\sigma_z$  constante. Il arrive un moment où, le cercle (1) grandissant au fur et à mesure que  $\sigma_x$  diminue, devient tangent à la droite intrinsèque (cercle (2)), et il y a rupture dans la masse du sol. C'est la **rupture par poussée**.



Dans le triangle OAB on a :  $AB = (\sigma_x + AP) \cdot \sin\phi$

$$D'autre part \quad AB = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}$$

On en tire la relation connue due à Coulomb :  $\frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \frac{1 - \sin\phi}{1 + \sin\phi}$

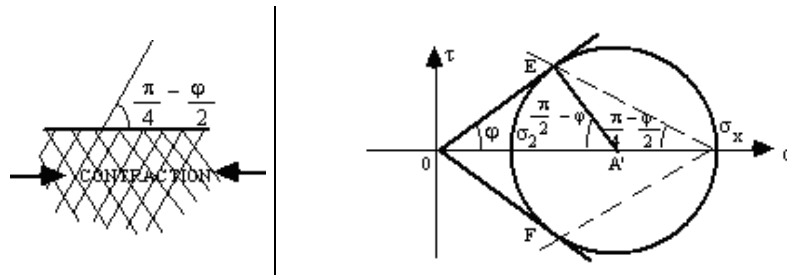
$$\text{Soit encore } \frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = K_p$$

Le coefficient  $K_p$  est appelé **coefficient de poussée**.

**Direction des surfaces de rupture :**

Le pôle est P et la direction des surfaces de rupture peut être soit PB ou PC. Elles font l'angle  $\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$  avec l'horizontale. Quelle que soit la profondeur, donc quelle que soit la contrainte  $\sigma_z = \gamma \cdot h$ , ces directions sont constantes et on a une double famille de plans de glissement inclinés à  $\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$  sur l'horizontale.

b) Imaginons maintenant que l'on provoque une contraction latérale du sol ; la contrainte  $\sigma_x$  augmente alors que  $\sigma_z$  reste constante. Au moment de la rupture, le cercle de Mohr (3) devient tangent à la courbe intrinsèque. On dira qu'il y a **rupture par butée**.



On aboutit à 
$$\frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$$

soit encore : 
$$\frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = K_B$$

**Le coefficient  $K_B$  est le coefficient de butée;**

On peut remarquer que  $K_B = 1/K$  et par le même raisonnement que précédemment on trouve que les plans de rupture sont inclinés à  $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$  sur l'horizontale.

**2.1.2. - Cas d'un sol cohérent (c,  $\phi$ )**

En reprenant les résultats de la loi de Coulomb on peut écrire pour un sol pulvérulent :

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} = 0 \quad [1]$$

$$\frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial x} = \gamma \quad [2]$$

$$\frac{(\sigma'_x + \sigma'_z)}{2} \cdot \sin^2 \phi = \frac{(\sigma'_x - \sigma'_z)}{2} + \tau'_{xz} \quad [2]$$

On constate que si on fait un changement de variables permettant de passer d'un milieu pulvérulent à un milieu cohérent, on obtient :

$$\text{En posant } \begin{cases} \sigma'_x = \sigma_x + \frac{c}{\operatorname{tg} \phi} \\ \sigma'_z = \sigma_z + \frac{c}{\operatorname{tg} \phi} \\ \tau'_{xz} = \tau_{xz} \end{cases}$$

Les équations (1), (2), (3) seront du même type. On a transformé un milieu pulvérulent en un milieu cohérent. Il suffit donc de prendre les résultats d'un milieu pulvérulent et de les adapter à un milieu cohérent. Ce théorème dû à Caquot, s'appelle **théorème des états correspondants**.

$$\text{Pour la poussée, on a : } K_p = \frac{\sigma_x + \frac{c}{\operatorname{tg} \phi}}{\sigma_z + \frac{c}{\operatorname{tg} \phi}} = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$$

$$\text{Pour la poussée, on a : } K_B = \frac{\sigma_x + \frac{c}{\operatorname{tg} \phi}}{\sigma_z + \frac{c}{\operatorname{tg} \phi}} = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right)$$

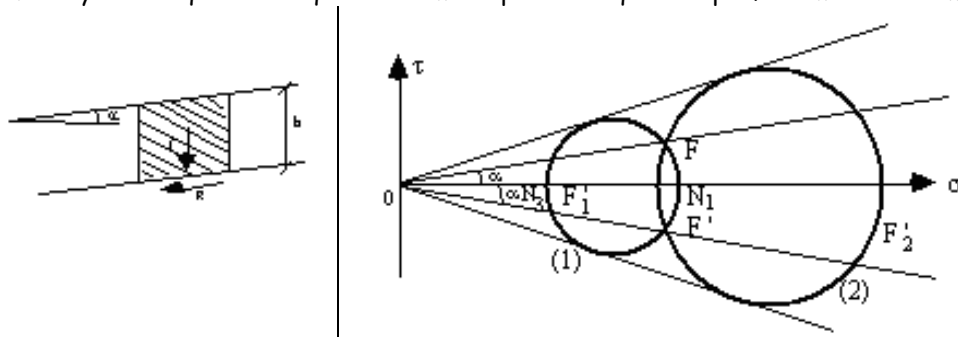
On en tire suivant le cas : Pour la poussée, on a :  $\sigma_x = \sigma_z \cdot K_p \pm 2c \cdot \sqrt{K_p}$

Les directions des plans de rupture restent les mêmes que précédemment.

## 2.2. - Equilibre d'un massif à surface inclinée

### 2.2.1. - Sol pulvérulent

La contrainte agissant sur un plan parallèle à la surface libre est verticale et a pour valeur :  $f = \gamma h \cdot \cos \alpha$ . A partir de cette contrainte, la théorie du cercle de Mohr permet de déterminer le tenseur des contraintes au point M, et par conséquent de connaître l'équilibre du massif. Par le point F représentant la contrainte f, il ne passe que deux cercles tangents aux droites de Coulomb. Il n'y a donc que deux équilibres limites possibles qui sont parfaitement déterminés.

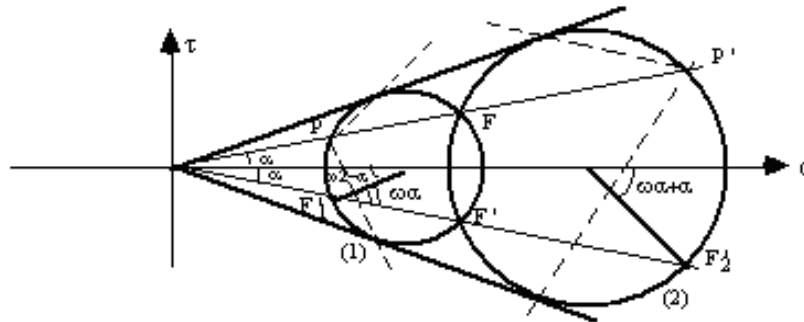


Déterminons la contrainte agissant sur un plan vertical. Le point représentatif de cette contrainte sur le cercle de Mohr se déduit du point F par une rotation de  $\pi - 2\alpha$ . On voit que ce point est le point F' à l'intersection du cercle et de la droite OF'2 symétrique de OF par rapport à l'axe horizontal Oσ. Il en va de même en ce qui concerne le cercle (2). Le point représentatif

sera  $F'2$ . On constate que l'obliquité de ces contraintes est  $\alpha$ . Elles sont donc bien parallèles à la surface libre.

**Direction des lignes de glissements :**

Cette détermination est immédiate. Considérons tout d'abord le cercle (1) :

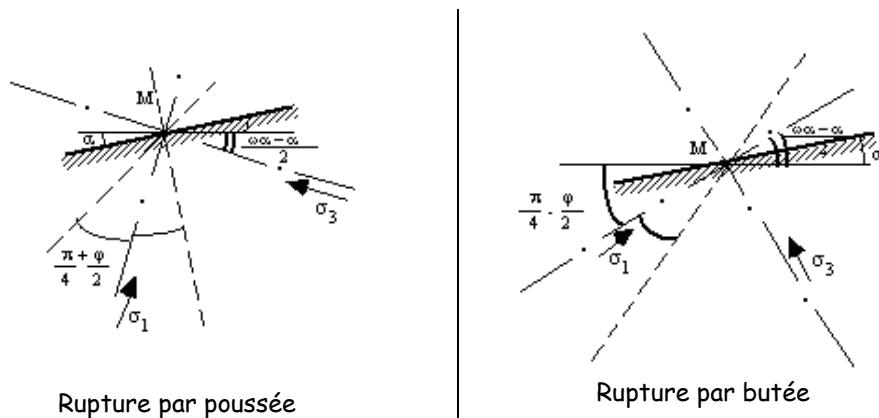


Il faut d'abord préciser la direction de la contrainte principale majeure  $\sigma_1$ , ce qui revient à déterminer la direction de la facette sur laquelle agit la contrainte principale mineure  $\sigma_3$  représentée par  $N_3$ . Celle-ci fait un angle  $\frac{N_3CF_1}{2}$ , soit  $\frac{w_\alpha - \alpha}{2}$ . Le calcul de l'angle auxiliaire  $w_\alpha$  peut se faire facilement :

$$\sin w_\alpha = \frac{\sin \alpha}{\sin \phi}$$

La contrainte principale et les deux directions de glissement font un angle  $\frac{\pi - \phi}{4}$ . Il en sera de même avec le cercle (2). La contrainte principale mineure fait avec la verticale un angle  $\frac{w_\alpha + \alpha}{2}$

et les deux directions de glissement font avec cette contrainte un angle de  $\frac{\pi + \phi}{4}$ . On en déduit donc les directions des plans de glissement dans les ruptures par poussées (cercle (1)), et par butée (cercle (2)).



**2.2.2. - Sol cohérent**

Dans le cas où les caractéristiques du sol sont  $c$  et  $\phi$ , le problème se complique ; on montre facilement que les directions de rupture d'une même famille ne sont plus parallèles entre elles. Les surfaces de rupture ne sont plus planes.

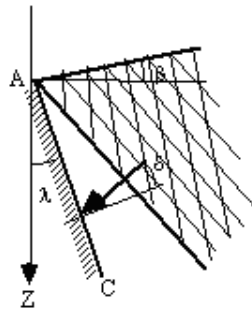
### 3. - EQUILIBRE DE BOUSSINESQ

#### 3.1.- Généralités

Le schéma de Rankine est très simple mais ses applications sont limitées. Les lignes de glissement que l'on observe "in situ" ne sont habituellement pas rectilignes. De plus, les massifs sont souvent limités par des parois ou écrans et l'on constate que la rugosité de ces écrans joue un rôle important. En effet, le long d'un mur de soutènement, l'obliquité  $\delta$  des contraintes dépend du frottement des terres sur la maçonnerie. Si le mur est lisse :  $\delta = 0$ . Si le mur est rugueux :  $\delta = \phi$ . Pour un mur coffré on a l'habitude de prendre  $\delta = 2/3\phi$ .

#### 3.2. - Influence de la rugosité de l'écran

Soit  $\delta$  l'obliquité des contraintes agissant sur un écran incliné de  $\lambda$  sur la verticale.



$\delta$  dépend :

- de l'angle de frottement interne du sol  $\phi$ ,
- de la rugosité de l'écran,
- du déplacement relatif entre l'écran et le sol (en particulier du sens : poussée ou butée).

Nécessairement :  $-\phi < \delta < +\phi$ .

On choisira le sens positif dans le sens trigonométrique pour tous les angles  $\beta, \lambda, \delta, \phi$ .

Dans l'état de rupture (par poussée ou par butée), Boussinesq étudie l'équilibre limite constitué par :

- un équilibre de Rankine au-delà du plan AC faisant avec la verticale un angle  $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$   
pour la poussée et  $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$  pour la butée.
- Entre AC et l'écran, un équilibre composé de surfaces de rupture telles que la contrainte  $\bar{f}$  fasse l'angle  $\delta$  avec la normale à l'écran. Dans ces conditions, Boussinesq donne l'expression de la contrainte  $\bar{f}$  à la distance  $l$  du sommet du mur (comptée parallèlement à l'écran) sous la forme :

$$\text{Poussée } f = \frac{1}{2} \gamma l^2 K_p$$

$$\text{Butée } f = \frac{1}{2} \gamma l^2 K_B$$

$K_p$  et  $K_B$  ont été calculée en fonction de  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\delta$ ,  $\phi$ . Comme dans la méthode de Rankine, la répartition des contraintes est triangulaire.

### **3.3.- Avantages et inconvénients des 2 méthodes**

La méthode de Rankine qui ne tient pas compte du frottement sol/mur est conservatrice. Le calcul en poussée peut être utilisé pour les ouvrages simples et les pré-dimensionnements. Le calcul en butée qui suppose des surfaces de ruptures planes, ce qui est très éloigné de la réalité, conduit à des résultats douteux. La méthode de Boussinesq (tables de Caquot) permet de tenir compte du frottement réel sol/mur et introduit des courbes de rupture plus réalistes. Les résultats, surtout en butée sont meilleurs.