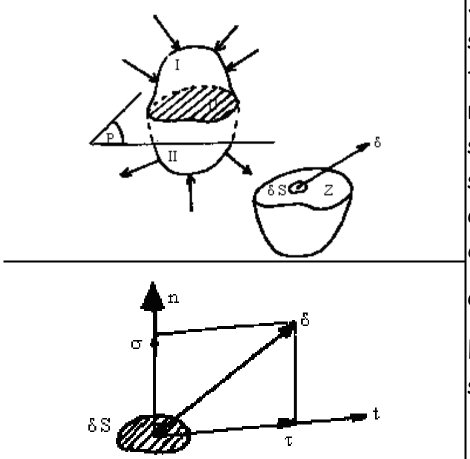
CONTRAINTES DANS LES SOLS

1. - NOTIONS GENERALES

1.1. - Notion de contrainte



Soit un solide S sur lequel s'exercent des forces de surface et de volume. Coupons ce solide par un plan fictif P et enlevons la partie supérieure I. Pour rétablir l'équilibre de II, il faut appliquer sur la surface Σ un certain système de force. Avec ce système, la force qui agit sur une surface élémentaire δS entourant le point M est δF ; la contrainte en M sur la facette δS est par définition égale à $\frac{\delta F}{\partial S}$. On décompose cette contrainte suivant la normale à la facette et un axe perpendiculaire situé dans le plan de la facette (ou plan tangent).

σ **: contrainte normale**

τ **: contrainte tangentielle**

1.2. - Etat de contrainte en un point M

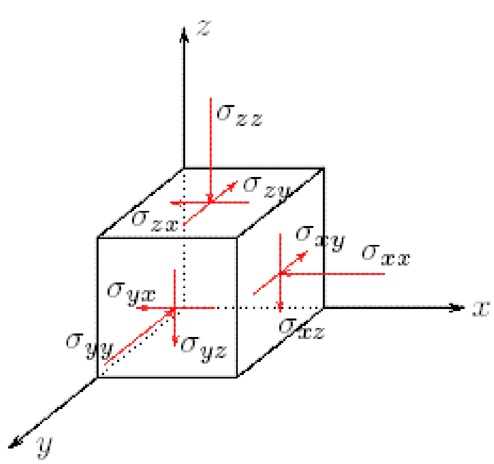
Soit un point M d'un milieu continu et un trièdre de référence Oxyz. Considérons un parallélépipède élémentaire dont les faces sont parallèles aux plans principaux du trièdre de référence et d'arêtes dx, dy, dz. Si on décompose le système de forces agissant sur le point M suivant les six faces, on obtient un système de contraintes normales et tangentielles sur chacune des faces. Suivant les directions indiquées sur la figure, la théorie montre que pour qu'il y ait équilibre, il faut nécessairement que :

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

et en outre on constate que la contrainte en M sur une facette de cosinus directeurs α, β, γ dépend des 6 quantités σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}. Elle a pour composantes :



$$\vec{f}\begin{cases} f_x = \alpha.\sigma_x+\beta.\tau_{xy}+\gamma.\tau_{xz} \\ f_y = \alpha.\tau_{yx}+\beta.\sigma_y+\gamma.\tau_{yz} \\ f_z = \alpha.\tau_{zx}+\beta.\tau_{zy}+\gamma.\sigma_z \end{cases}$$

De plus il existe en tout point des plans privilégiés orthogonaux entre eux, sur lesquels la contrainte est normale (contrainte tangentielle nulle) : ce sont les **plans principaux ;** les contraintes sur ces trois plans sont notées par convention σ_1, σ_2, σ_3 et elles sont appelées **contraintes principales.** Généralement la notation est choisie telle que : $\sigma_3 \le \sigma_2 \le \sigma_1$.

1.3. - Equations générales d'équilibre

Supposons connu le tenseur des contraintes en M et considérons l'équilibre du parallélépipède centré en M et d'arête dx, dy, dz.

Ce prisme est soumis :

- sur ses faces à des forces du type $(\sigma_x \pm \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}.\frac{dx}{2}).dy.dz$

$$(\sigma_{yx} \pm \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}.\frac{dx}{2}).dy.dz \ldots\ldots$$

- dans sa masse à des forces volumique **X**.dxdydz, **Y**.dxdydz, **Z**.dxdydz· (X, Y, Z) sont les composantes des forces volumiques au point M suivant les trois axes. L'équilibre du parallélépipède conduit aux équations :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}=X$$
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}=Y$$
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial x}=Z$$

1.4. - Notion de déformation

Considérons un solide S repéré par rapport à un système d'axes Oxyz devenant S' après déformation et soient deux points M et P liés à S devenant M' et P', les points M et P étant choisis très voisins.

$$M \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \Rightarrow \vec{MP} \begin{cases} dx \\ dy \\ dz \end{cases} \qquad M' \begin{cases} x+u \\ y+u \\ z+u \end{cases} \Rightarrow \vec{M'P'} \begin{cases} dx+du \\ dy+du \\ dz+du \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz \\ du=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz \\ du=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz \end{cases}$$

$$\begin{cases} du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{1}{2}.(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}).dy-\frac{1}{2}.(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z})dz+\frac{1}{2}.(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})dy+\frac{1}{2}.(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}) \\ dv \ =......... \\ dw \ =......... \end{cases}$$

Les éléments du tenseur des déformations **au point M** sont les suivants :

$$\begin{cases} \varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad \text{Déformations longitudinales} \quad \begin{cases} \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z} \end{cases} \quad \text{Déformations angulaires}$$

1.5. - Relations contraintes / déformations

En tout point M, on a comme inconnues :

- 6 composantes du tenseur de contraintes,
- 6 composantes du tenseur des déformations,

- 3 composantes du déplacement u, v, w.
Les équations dont on dispose sont :
- les 3 équations générales d'équilibre,
- les 6 équations définissant les déformations à partir des déplacements.

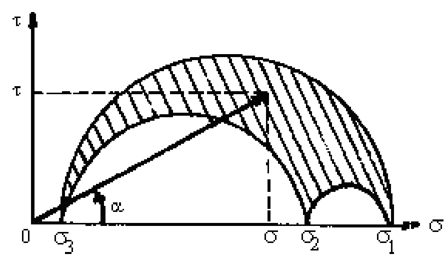
Pour définir parfaitement l'état d'un milieu continu, il faut donc 6 équations supplémentaires. Ces relations entre contraintes et déformations définissent **la loi de comportement du sol.** Dans le cas général, cette loi est inconnue car le sol est un milieu discontinu et non-homogène. On pourra en première approximation utiliser les résultats de l'élasticité linéaire bien qu'il ne correspondent pas toujours au comportement réel du sol.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \gamma(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \gamma(\sigma_x + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \gamma(\sigma_x + \sigma_y)\right] \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{2.(1+\upsilon)}{E}.\tau_{yz} \\ \gamma_{yz} = \frac{2.(1+\upsilon)}{E}.\tau_{zx} \\ \gamma_{zx} = \frac{2.(1+\upsilon)}{E}.\tau_{zx} \end{cases}$$

E : module d'Young ; ν : coefficient de poisson

1.6. - Cercles de Mohr

Considérons en un point M du milieu, les 3 contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3. Pour tout plan passant par M, on peut représenter la contrainte agissant sur ce plan par ses composantes σ et τ. Chaque plan (et son état de contrainte) est représenté par un point du diagramme dans un système σ, τ. On a donc le "vecteur" contrainte et son obliquité par rapport à la normale.



On démontre que les points représentatifs des contraintes agissant sur les plans contenant σ_2 sont situés sur un cercle de diamètre σ_1 - σ_3 , les trois contraintes σ_1, σ_2, σ_3, étant nécessairement situées sur l'axe σ. Il en est de même pour les autres contraintes. Les contraintes agissant sur ces 3 infinités de plans ont leurs points représentatifs dans le diagramme de Mohr, situés sur les trois cercles indiqués. Les contraintes agissant sur tous les autres plans de l'espace se situent donc dans la zone hachurée du diagramme.

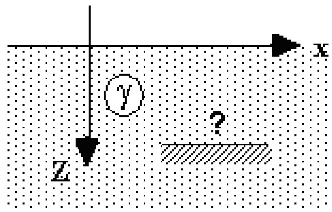
2. - APPLICATIONS PRATIQUES AU CALCUL DES CONTRAINTES DANS LES SOLS

2.1.- Généralités

La plupart des problèmes de mécanique des sols peuvent se ramener à des problèmes plans soit pour des raisons géométriques des ouvrages (talus, remblais, semelles filantes ...), soit parce qu'ils présentent une symétrie axiale (fondations circulaires, pieux ...).

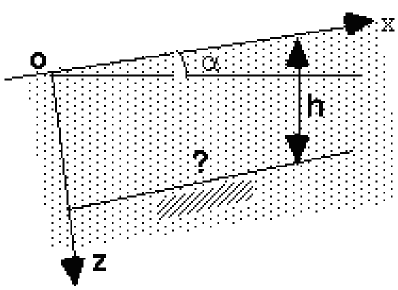
2.2.- Calcul des contraintes dans quelques cas particuliers

2.2.1.- Sol infini à surface horizontale



Par raison de symétrie, les contraintes agissant sur les plans horizontaux et verticaux sont principales. σ_X et σ_Y sont principales τ_{XZ} = 0. Les équations conduisent à $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}=0$ et $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=\gamma$. Donc $\sigma_X = f(z)$ et $\sigma_Z = \gamma\, z$ (donc σ_Z est la seule contrainte définie). Si on a plusieurs couches horizontales d'épaisseur z_i et de poids spécifique γ_i , à la profondeur $z=\sum_i z_i$ on a $\sigma_z=\sum_i z_i$.

2.2.2.- Sol infini à surface inclinée



Les équations d'équilibre donnent :

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=-\gamma \sin\alpha$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}=-\gamma \cos\alpha$$

Par raison de symétrie, l'état de contrainte en un point doit être indépendant de x ce qui donne :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}=0$$

et

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}=0$$

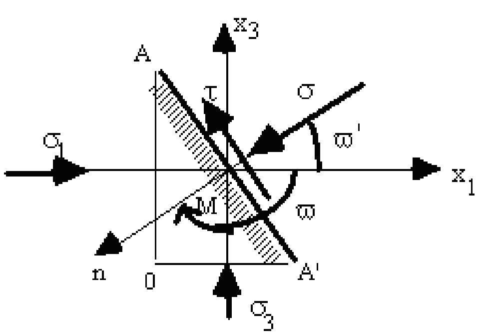
$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=-\gamma \sin\alpha$ d'où $\boldsymbol{\sigma_z = \gamma . z . \cos\alpha}$

$\frac{\partial \sigma_z}{\partial y}=-\gamma \cos\alpha$ d'où $\boldsymbol{\tau_{zx} = \gamma . z . \sin\alpha}$

Donc sur une parallèle à la surface, la contrainte est verticale et égale à :

$$\boldsymbol{\gamma . z = \tau_{zx} = \gamma . z . \cos\alpha}$$

2.2.3.- Calcul des contraintes sur une facette quelconque passant par un point connaissant 2 contraintes principales

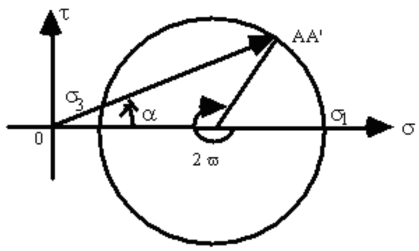


C'est un cas que l'on rencontre très souvent en mécanique des sols. Considérons une facette quelconque AA' passant par M, sur laquelle on désire connaître l'état de contrainte (σ, τ). Ecrivons que la somme des forces est nulle. Par convention, les angles seront pris positivement dans le sens horaire. De même, on a l'habitude d'orienter la normale à la facette dans le sens des compressions ; la tangente à la facette se déduit de la normale par rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens positif indiqué.

$$\begin{cases} \sigma_1 . OA - \sigma . AA' . \cos\varpi' - \tau . AA' . \sin\varpi = 0 \\ \sigma_3 . OA' - \sigma . AA' . \sin\varpi' - \tau . AA' . \cos\varpi = 0 \end{cases}$$

On déduit de ce système que :

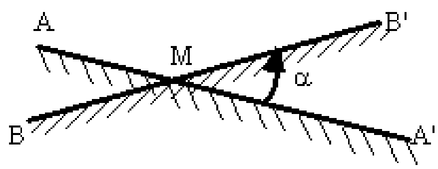
$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \cos 2\varpi'(OA - \sigma.AA'.\cos\varpi'(\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}) \\ \sigma_1 = \sin 2\varpi'(\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}) \end{cases}$$

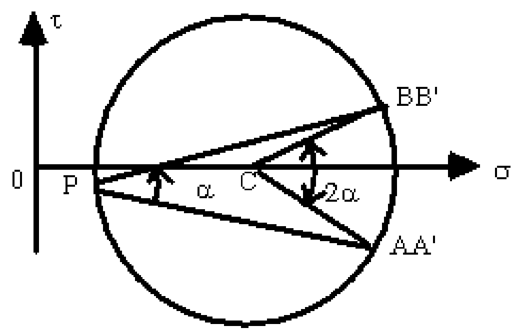


Représentation de Mohr : L'angle ϖ étant conventionnellement l'angle entre l'axe de la contrainte principales majeure et la normale à la facette, pris positivement dans le sens horaire, la facette AA' est représentée sur le cercle de Mohr par le point de ce cercle tel que l'angle formé entre l'axe des contraintes normales (point du cercle σ_1) et le point lui-même soit égal à 2ϖ.

3. - METHODE DU POLE

De la propriété ci-dessus découle une méthode permettant de déterminer très rapidement les contraintes sur tout plan passant par M lorsqu'on connaît le cercle de Mohr relatif à ce point et les contraintes sur un plan passant par M.





On connaît donc la représentation (Point AA') de la facette AA' passant par M. Par ce point, on mène une parallèle au plan AA' qui coupe le cercle au point P (pôle) ; par P on mène une parallèle à BB', on retrouve le point BB' représentatif de l'état de contrainte sur le plan BB'.